GENERALISASI KETAKSAMAAN COSINUS PADA SEBARANG SEGITIGA

by Nur Hidayatin

Submission date: 08-Dec-2021 03:10PM (UTC+0700)
Submission ID: 1724254506
File name: cek_plagiasi-21.docx (80.18K)
Word count: 1565
Character count: 11152

GENERALISASI KETAKSAMAAN COSINUS PADA SEBARANG SEGITIGA

Nur Hidayatin[1]

[1] FSAINTEK, Universitas PGRI Argopuro Jember

email korespondensi : hidayatin1990@gmail.com

ABSTRAK

Pada artikel ini akan dibahas ketaksamaan-ketaksamaan sinus dan cosinus pada sudut-sudut segitiga. Ketaksamaan-ketaksamaan ini meliputi, ketaksamaan jumlahan sinus pada segitiga, ketaksamaan jumlahan sinus setengah sudut–sudut pada segitiga, dan ketaksamaan jumlahan cosinus pada segitiga, serta ketaksamaan perkalian cosinus yang berlaku pada sebarang segitiga. Didefinisikan sinus merupakan perbandingan sisi yang menghadap sudut dengan sisi miring pada segitiga, dan cosinus merupakan perbandingan sisi yang bersebelahan dengan sudut dengan sisi miring/hiponetusa segitiga. Selain itu, juga dipelajari aturan sinus dan cosinus, konsep segitiga meliputi jejari lingkaran dalam dan lingkaran luar segitiga, serta ketaksamaan rata-rata aritmatika dan geometri. Dengan menggunakan konsep-konsep segitiga dan sinus–cosinus tersebut, dapat diperoleh ketaksamaan-ketaksamaan sinus-cosinus yang berlaku pada segitiga. Dari ketaksamaan–ketaksamaan cosinus tersebut, dapat ditentukan generalisasi dari ketaksamaan tersebut, yaitu generalisasi ketaksamaan jumlahan cosinus dan generalisasi ketaksamaan perkalian cosinus yang berlaku pada sebarang segitiga.

Kata kunci : ketaksamaan, cosinus, segitiga

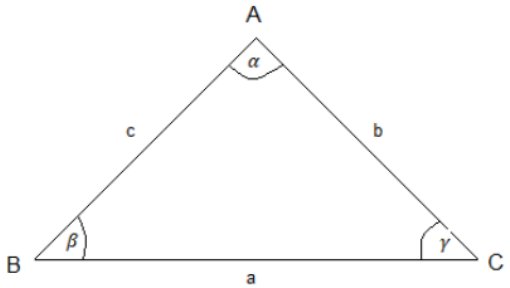
ABSTRACT

we will study the inequalities of sines and cosines of the angles of triangles. These inequalities include, the sine's sum inequality of a triangle, the inequality of the sum of sine half angles of a triangle, and the cosine's sum inequality of triangle, and the cosine's multiplication inequality of any triangle. The sine defined as the ratio of the triangle 's opposite side to his hypotenuse, and the cosine is the fraction of the triangle 's adjacent side to his hypotenuse. In addition, the sine and cosine rules will also be studied, the concept of a triangle includes the incircle and circumcircle of a triangle, and the arithmetic and geometric mean inequalities. By using the concepts of triangles and sine - cosine, we get the sine and cosine inequalities of any triangle. From these cosine inequalities, generalizations of these inequalities can also be determined, namely generalizations of the cosine sum inequality and generalization of the cosine multiplication inequality of any triangle.

Key words: *inequality, cosine, triangle*

Pendahuluan

Geometri merupakan cabang matematika yang mempelajari tentang pengukuran, bentuk-bentuk benda, baik bentuk benda alam maupun bentuk bangunan. Geometri merupakan salah satu bagian matematika yang sering ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Oleh Karena itu, sejak kecil anak anak sudah belajar mengenal bentuk-bentuk Geometri (Putri et al., 2020). Kumpulan titik-titik membentuk garis. Kemudian jika terdapat tiga garis yang tiap ujungnya saling bertemu sehingga membentuk sebuah bangun, maka bangun tersebut dinamakan segitiga. Segitiga merupakan bangun paling sederhana dari Geometri. Segitiga dapat dimanfaatkan dalam menentukan panjang jari-jari lingkaran (Surlina et al., 2018). Ada banyak hal yang bisa dipelajari pada bidang segitiga, seperti garis-garis istimewa pada segitiga dan sudut-sudut segitiga (Kamariah, 2015). Selanjutnya daerah yang terbentuk dari pertemuan dua garis dinamakan sudut. Pada sebuah segitiga didapat tiga sudut seperti pada gambar berikut



Gambar 1

(Ayres, 1954)

Berdasarkan gambar 1, diperoleh aturan sinus dan cosinus dengan menggunakan hukum Pythagoras yaitu

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

dan

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

(Hoehn, 2013)

yang selanjutnya disebut aturan cosinus untuk sebarang segitiga,

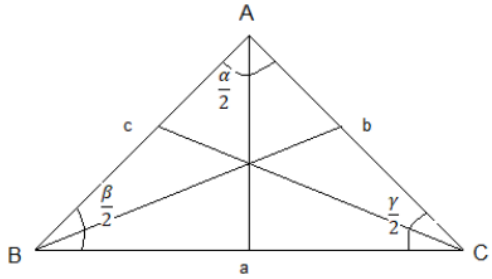
serta

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

(Coghetto, 2014)

yang selanjutnya disebut aturan Sinus untuk sebarang segitiga.

Selanjutnya, jika diberikan garis bagi sudut sehingga membagi dua sudut sama besar, maka diperoleh $0 < \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ dan $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$, dengan α, β, γ merupakan sudut-sudut pada segitiga.



Gambar 2

Dengan menggunakan aturan sinus dua sudut dan aturan cosinus (Conway & Ryba, 2016), maka bisa diperoleh nilai sinus setengah sudut, yaitu

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}},$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

dan

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

yang mana s menyatakan keliling pada segitiga.

(Chauvenet, 1887)

Selanjutnya, didapatkan pula nilai cosinus setengah sudut sebagai berikut

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

dan

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

yang mana s menyatakan keliling segitiga.

(Chauvenet, 1887)

Metode Penelitian

Dalam penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif, yaitu melakukan kajian pustaka sebuah teori lalu dikembangkan sehingga memunculkan generalisasi dari teori tersebut, yaitu generalisasi ketaksamaan cosinus pada sebarang segitiga. Untuk mendapatkan generalisasi dari ketaksamaan cosinus pada sebarang segitiga, yaitu dilakukan dengan beberapa langkah. Langkah pertama yaitu mempelajari konsep trigonometri, meliputi definisi sinus dan cosinus, aturan sinus dan cosinus. Langkah berikutnya, mengkaji/mempelajari konsep segitiga, diantaranya mengkaji hubungan jejari lingkaran dalam segitiga dengan sisi - sisi segitiga, dan hubungan jejari lingkaran luar segitiga dengan jejari lingkaran dalam segitiga, serta hubungan jejari tersebut dengan luas segitiga. Selanjutnya, mengkaji ketaksamaan rata rata aritmatika dan geometri. Lalu, mengkaji ketaksamaan-ketaksamaan sinus dan cosinus pada segitiga. Kemudian langkah terakhir menentukan generalisasi dari ketaksamaan-ketaksamaan cosinus yang berlaku pada segitiga dan dibuktikan kebenarannya.

Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan definisi sinus dan cosinus diatas, maka diperoleh beberapa ketaksaman-ketaksamaan trigonometri, khususnya ketaksamaan sinus dan cosinus pada segitiga yang tertuang pada beberapa teorema berikut.

Teorema 1. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, berlaku

$$0 < \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq {}^{1}/_{8}.$$

(Bottema, 1969)

Bukti. Dengan definisi sinus setengah sudut segitiga, diperoleh

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}=\frac{L^2}{sabc},$$

dengan L menyatakan luas pada sebarang segitiga, s menyatakan keliling pada sebarang segitiga. Dengan menggunakan jejari lingkaran luar dan lingkaran dalam segitiga, yaitu $R=\frac{abc}{4L}$ dan $r=\frac{L}{s}$, R merupakan jejari lingkaran luar segitiga dan r dinotasikan sebagai jejari lingkaran dalam segitiga (Gonz, 2012)(Josefsson, 2011), maka

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{Lr}{4RL}=\frac{r}{4R}.$$

Karena $R\geq 2r$ (Nhi, 2013), maka diperoleh

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\leq {}^{1}\!/_{8}.$$

Selanjutnya karena $\alpha,\beta,\gamma>0$, sehingga mengakibatkan

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)>0.$$

∎

Teorema 2. Diketahui $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$ dan $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, berlaku

$$\frac{3}{4}\leq\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)<1.$$

(Bottema, 1969)

Bukti. Dengan menggunakan identitas trigonometri (Sundstrom, Ted and Schlicker, 2021), diperoleh

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)=1-\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right).$$

Diperhatikan bahwa

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(\cos\alpha+\cos\beta)-\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

(Gresham et al., 2019)

Dengan menggunakan definisi cosinus dua sudut (Beveridge, 2014), maka

$$\frac{1}{2}\cdot(\cos\alpha+\cos\beta)-\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 1, diperoleh

$$\frac{3}{4} \leq \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) < 1.$$

∎

Teorema 3. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, berlaku

$$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq {}^{3}/_{2}.$$

(Bottema, 1969)

Bukti. Diperhatikan bahwa

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -2 \cdot \left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) + 3.$$

(Annaby & Hassan, 2018)

Dengan menggunakan Teorema 2, diperoleh

$$1 < -2 \cdot \left(\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) + 3 \leq {}^{3}/_{2}.$$

Jadi terbukti.

∎

Teorema 4. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, berlaku

$$0 < \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leq {}^{1}/_{8}.$$

(Bottema, 1969)

Bukti. Misalkan $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, dan $z = \cos\gamma$, dengan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Berdasarkan ketaksamaan rerata aritmatika-geometri (Zou & Jiang, 2015), didapat

$$\left(\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}\right)^3 \geq \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

Selanjutnya dengan memanfaatkan Teorema 3, diperoleh

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leq {}^{1}/_{8}.$$

∎

Teorema 5. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, berlaku

$$(\cos\alpha)^{2^n} + (\cos\beta)^{2^n} + (\cos\gamma)^{2^n} \geq \frac{3}{(2)^{2^n}},$$

pada setiap n bilangan asli .

Bukti. Dengan memakai teknik induksi matematika,

(i) Misalkan untuk $n = 1$, diperoleh

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = -(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) + 3 \geq {}^3/_4.$$

(ii) Diasumsikan benar untuk $n = k$, maka

$$(\cos\alpha)^{2^k} + (\cos\beta)^{2^k} + (\cos\gamma)^{2^k} \geq \frac{3}{(2)^{2^k}}.$$

(iii) Lebih lanjut, dibuktikan benar pada $n = k + 1$, berlaku

$$(\cos\alpha)^{2^{k+1}} + (\cos\beta)^{2^{k+1}} + (\cos\gamma)^{2^{k+1}} \geq \frac{3}{(2)^{2^{k+1}}}.$$

Diketahui bahwa

$$(\cos\alpha)^{2^{k+1}} + (\cos\beta)^{2^{k+1}} + (\cos\gamma)^{2^{k+1}}$$
$$= \left(\cos^{2^k}\alpha\right)^2 + \left(\cos^{2^k}\beta\right)^2 + \left(\cos^{2^k}\gamma\right)^2.$$

Misalkan $a = \cos^{2^k}\alpha$, $b = \cos^{2^k}\beta$, $c = \cos^{2^k}\gamma$, dengan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Dengan memanfaatkan ketaksamaan dari kuadrat jumlahan panjang sisi segitiga (Mineno et al., 2012), diperoleh

$$\left(\cos^{2^k}\alpha\right)^2 + \left(\cos^{2^k}\beta\right)^2 + \left(\cos^{2^k}\gamma\right)^2 \geq \frac{3}{(2)^{2^{k+1}}}$$

∎

Teorema 6. Diketahui $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, sehingga berlaku

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right) + \cos\left(\frac{\gamma}{2^n}\right) \leq \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2 + 1}}}}_{angka\ 2\ sebanyak\ n\ suku}},$$

untuk setiap n bilangan bulat tak negatif.

Bukti. Dengan menggunakan induksi matematika,

(i) Untuk $n = 0$, telah terbukti benar pada teorema 3

(ii) Diasumsikan benar untuk $n = k$, maka

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right) + \cos\left(\frac{\gamma}{2^k}\right) \leq \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2 + 1}}}}_{angka\ 2\ sebanyak\ k\ suku}},$$

(iii) Selanjutnya akan diuji kebenaran untuk $n = k + 1$, berlaku

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)+\cos\left(\frac{\beta}{2^{k+1}}\right)+\cos\left(\frac{\gamma}{2^{k+1}}\right)\leq\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+1}}}}_{angka\ 2\ sebanyak\ k+1\ suku}},$$

Diketahui bahwa

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)+\cos\left(\frac{\beta}{2^{k+1}}\right)+\cos\left(\frac{\gamma}{2^{k+1}}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right)}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\gamma}{2^k}\right)}{2}}.$$

Misalkan $x=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2^k}}{2}}$, $y=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\beta}{2^k}}{2}}$, $z=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\gamma}{2^k}}{2}}$. Dengan memanfaatkan ketaksamaan dari kuadrat jumlahan panjang sisi pada segitiga, diperoleh

$$\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right)}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\gamma}{2^k}\right)}{2}}$$

$$\leq\frac{3}{2}\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+1}}}}_{angka\ 2\ sebanyak\ k+1\ suku}},$$

untuk setiap n bilangan bulat tak negatif.

∎

Teorema 7. Diketahui $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$ dan $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, berlaku

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2^n}\right)\leq\frac{\left(\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+1}}}}_{angka\ 2\ sebanyak\ n\ suku}\right)^{\frac{3}{2}}}{8},$$

untuk setiap n bilangan bulat tak negatif.

Bukti. Dengan menggunakan induksi matematika,

(i) Untuk $n = 0$, telah dibuktikan benar pada Teorema 4.

(ii) Diasumsikan benar untuk $n = k$, maka

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2^k}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2^k}\right) \leq \frac{\left(\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+1}}}}_{angka\ \ 2\ \ sebanyak\ \ k\ \ suku}\right)^{\frac{3}{2}}}{8}$$

(iii) Lebih lanjut, akan dibuktikan kebenaran untuk $n = k + 1$, berlaku

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{\left(\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+1}}}}_{angka\ \ 2\ \ sebanyak\ \ k+1\ \ suku}\right)^{\frac{3}{2}}}{8}$$

Misalkan $x = \cos\frac{\alpha}{2^{k+1}}$, $y = \cos\frac{\beta}{2^{k+1}}$, $z = \cos\frac{\gamma}{2^{k+1}}$. Dengan memanfaatkan ketaksamaan rerata aritmatika-geometri (Mineno et al., 2012), diperoleh

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2^{k+1}}\right) \leq \left(\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)+\cos\left(\frac{\beta}{2^{k+1}}\right)+\cos\left(\frac{\gamma}{2^{k+1}}\right)}{3}\right)^3.$$

Berdasarkan Teorema 7, diperoleh

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2^{k+1}}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2^{k+1}}\right) \leq \left(\frac{\frac{3}{2}\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+1}}}}_{angka\ \ 2\ \ sebanyak\ \ k+1\ \ suku}}}{3}\right)^3.$$

∎

Kesimpulan

Kesimpulan

Dari pembahasan di atas, diperoleh kesimpulan ketaksamaan-ketaksamaan cosinus sudut–sudut segitiga adalah sebagai berikut:

1. $1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq {}^{3}/_{2}$
2. $0 < \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq {}^{1}/_{8}$

dengan α, β, γ menyatakan sudut-sudut segitiga.

Selanjutnya dari kedua ketaksamaan di atas dapat diperluas/digeneralisasi menjadi

$$(\cos\alpha)^{2^n} + (\cos\beta)^{2^n} + (\cos\gamma)^{2^n} \geq \frac{3}{(2)^{2^n}} \ ,$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + \cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right) + \cos\left(\frac{\gamma}{2^n}\right) \leq \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2+1}}}}_{angka\ \ 2\ \ sebanyak\ \ n\ \ suku}},$$

dan

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2^n}\right) \leq \frac{\left(\underbrace{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2+1}}}}_{angka\ \ 2\ \ sebanyak\ \ n\ \ suku}\right)^{\frac{3}{2}}}{8},$$

untuk setiap n bilangan asli.

Ucapan Terimakasih

Penulis ucapkan terima kasih kepada pihak institusi, tempat penulis bekerja dan mengabdi, yaitu Universitas PGRI Argopuro Jember dan semua pihak yang berperan dalam pembuatan dan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

Annaby, M., & Hassan, H. (2018). Trigonometric sums by Hermite interpolations_. *Applied Mathematics and Computation*, *330*, 213–224.

Ayres, F. (1954). *Schaum's Outline Series Theory, and Problems of Plane, and Spherical Trigonometri*. Mc Graw Hill Book Company.

Beveridge, R. W. (2014). *Trigonometry*. Creative Commons.

Bottema, O. (1969). *Geometric Inequalities*. Wolters Noordhoff Publishing.

Chauvenet, W. (1887). *A treatise on plane, and spherical trigonometry*. J B Lippincott Company.

Coghetto, R. (2014). Some Facts about Trigonometry, and Euclidean Geometry. *Formalized Mathematics*, *22*(4), 313–319.

Conway, J., & Ryba, A. (2016). *Remembering Spherical Trigonometry , To appear in the Math Gazette , March 2016*. *March*, 1–9.

Gonz, L. (2012). On the Intersections of the Incircle, and the Cevian Circumcircle of the Incenter. *Forum Geometricorum*, *12*, 141–148.

Gresham, J., Wyatt, B., & Crawford, J. (2019). Essential trigonometry without geometry. *Texas J. of Sci*, *71*(1).

Hoehn, L. (2013). Derivation of the law of cosines via the incircle. *Forum Geometricorum*, *13*, 133–134.

Josefsson, M. (2011). The Area of the Diagonal Point Triangle. *Forum Geometricorum*, *11*, 213–216.

Kamariah, K. (2015). Garis Istimewa Pada Segitiga. *MAGISTRA: Jurnal Keguruan Dan Ilmu Pendidikan*, *2*(2), 205–212.

Mineno, K., Nakamura, Y., & Ohwada, T. (2012). Characterization of the intermediate values of the triangle inequality. *Mathematical Inequalities and Applications*, *15*(4), 1019–1035.

Nhi, D. A. M. V. A. N. (2013). A new inequality and identity. *Journal of Science and Arts*, *1*(22).

Putri, L., Lopes, F., & Fitriani, Y. (2020). Analisis Aplikasi Belajar Bentuk Dalam Upaya Mengenalkan Bentuk Geometri Pada Anak Usia 4-5 Tahun Analysis of Belajar Bentuk Applications in an Effort to Introduce Geometry Shapes to 4-5 Years Old Children Lucia Putri Frida Lopes. *Kalimaya*, *8*, 1–10.

Sundstrom, Ted and Schlicker, S. (2021). *Trigonometry*. Creative Commons.

Surlina, S., Mashadi, M., & ... (2018). Menentukan Panjang Jari-jari Lingkaran Sawayama-Thebault. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *4*(2), 37–44.

Zou, L., & Jiang, Y. (2015). Improved arithmetic-geometric mean inequality, and its application. *Journal of Mathematical Inequalities*, *9*(1), 107–111.

GENERALISASI KETAKSAMAAN COSINUS PADA SEBARANG SEGITIGA

ORIGINALITY REPORT

20%	14%	12%	11%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	math.mosolymp.ru Internet Source	1%
2	srns.ru Internet Source	1%
3	sumo.stanford.edu Internet Source	1%
4	Submitted to Charles University Student Paper	1%
5	Submitted to Letovo School Student Paper	1%
6	journal.umpo.ac.id Internet Source	1%
7	hal.archives-ouvertes.fr Internet Source	1%
8	calhoun.nps.edu Internet Source	1%
9	Submitted to Australian International School Hong Kong	1%

Student Paper

10	Submitted to 7996 Student Paper	1 %
11	Wei Cao, Yufeng Shi, Dong Mei, Mingyue Li, Dehe Liu. "Reconstruction of Ancient Stone Arch Bridge Via Terrestrial LiDAR Technology", IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020 Publication	1 %
12	Submitted to Higher Education Commission Pakistan Student Paper	1 %
13	Submitted to International School Almere Student Paper	1 %
14	antologi.upi.edu Internet Source	1 %
15	Submitted to iGroup Student Paper	1 %
16	Artur Miazek, Artur Podleśny. "Methods of creating sports rankings based on selected examples", Sport i Turystyka. Środkowoeuropejskie Czasopismo Naukowe, 2021 Publication	<1 %
17	Submitted to St Stephen's College Student Paper	<1 %

18	Valery V. Volchkov, Vitaly V. Volchkov. "Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces", Springer Science and Business Media LLC, 2013 Publication	<1 %
19	Submitted to Virginia Polytechnic Institute and State University Student Paper	<1 %
20	digilib.uns.ac.id Internet Source	<1 %
21	pt.scribd.com Internet Source	<1 %
22	tailieu.vn Internet Source	<1 %
23	tempus.ii.uni.wroc.pl Internet Source	<1 %
24	Shinta Wulandari. "Kemampuan Spasial dalam Pengkonstruksian Jaring-Jaring Kubus dan Balok", Jurnal Edukasi Matematika dan Sains, 2019 Publication	<1 %
25	shopping.modaresanesharif.ac.ir Internet Source	<1 %
26	Andrés Macho - Ortiz, Daniel Pérez - López, José Capmany. "Optical Implementation of 2 ×	<1 %

2 Universal Unitary Matrix Transformations", Laser & Photonics Reviews, 2021
Publication

27	fr.scribd.com Internet Source	<1 %
28	id.scribd.com Internet Source	<1 %
29	Youmin Hu, Jikai Fan, Jin Yu. "Study of the Influences of Transient Crack Propagation in a Pinion on Time-Varying Mesh Stiffness", Shock and Vibration, 2016 Publication	<1 %

Exclude quotes	Off	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		

GENERALISASI KETAKSAMAAN COSINUS PADA SEBARANG SEGITIGA

GRADEMARK REPORT

FINAL GRADE

/0

GENERAL COMMENTS

Instructor

PAGE 1

PAGE 2

PAGE 3

PAGE 4

PAGE 5

PAGE 6

PAGE 7

PAGE 8

PAGE 9

PAGE 10

PAGE 11